

Concursul de admitere iulie 2012,  
Domeniul de licență - Informatică

I. Algebră

(I) Fie mulțimea  $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0\}$ .

(i) Să se arate că împreună cu operația  $*$  definită prin  $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$ ,  $G$  este grup care nu este abelian.

(ii) Să se determine toate elementele  $(a, b)$  din  $G$  pentru care există  $n \geq 2$  astfel încât  $(a, b) * (a, b) * \dots * (a, b) = (1, 0)$ , unde în membrul stâng apar  $n$  de  $(a, b)$ .

(II) Fie  $z \in \mathbf{R}$  astfel încât  $z + \frac{1}{z} = 3$ .

(i) Să se calculeze  $z^n + \frac{1}{z^n}$  pentru  $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ .

(ii) Să se arate că  $z^n + \frac{1}{z^n} \in \mathbf{Q}$  pentru orice număr natural  $n \geq 1$ .

II. Analiză

Fie funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ .

1. Determinați ecuațiile asimptotelor graficului funcției  $f$ .

2. Studiați monotonia și determinați valoarea maximă a funcției  $f$ .

3. Să se arate că  $\int_1^e f(x) dx = 4 - 2\sqrt{e}$ .

4. Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  definit prin  $x_0 > 0$  și  $x_{n+1} = f(e^{x_n})$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ , este convergent la 0.

III. Geometrie

1. Fie  $ABCD$  un paralelogram și fie  $P, Q$  puncte astfel ca  $\vec{PC} = \frac{1}{3} \vec{AC}$ , respectiv  $\vec{BQ} = 2 \vec{QD}$ . Să se determine  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  cu proprietatea că  $\vec{AP} + \vec{BQ} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AD}$  și să se arate că dreptele  $PQ$  și  $BA$  sunt paralele.

2. Fie  $A(1, 3), B(-1, -1), C(5, 1)$ . Să se determine ecuația dreptei suport a bisectoarei din  $A$  a triunghiului  $ABC$ .

3. Știind că  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}$ , să se calculeze  $\sin 2\alpha$ .

IV. Informatică

Se consideră șirul de numere naturale  $x = 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots$  (fiecare număr natural nenul apare, în ordine, de un număr de ori egal cu el însuși). a) Se dă un număr natural nenul  $n$ . Să se scrie un program care afișează primii  $n$  termeni al șirului  $x$ . b) Se dă un număr natural nenul  $n$ . Să se scrie un program care afișează în timp constant (care nu depinde de  $n$ ) al  $n$ -lea termen al șirului  $x$ . c) Se dă un număr natural nenul  $n$  și  $n$  numere naturale nenule  $y_1, \dots, y_n$ . Să se scrie un program care verifică (afișând "DA", respectiv "NU") dacă există o permutare a termenilor  $y_1, \dots, y_n$  care să fie identică cu primii  $n$  termeni ai șirului  $x$ . d) Dați o soluție în timp liniar (în funcție de  $n$ ) cerinței de la punctul c).

**Notă:** Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.

Timp de lucru 3 ore.