

Universitatea din Bucuresti, Facultatea de Matematică și Informatică
Concursul de admitere, iulie 2011. Domeniul de licență - *Matematică*

I. Algebră (1) Să se rezolve ecuațiile:

- (a) $\sqrt{5x-1} = x+1$, unde $x \in \mathbf{R}$.
- (b) $2^x + 4^x = 72$, unde $x \in \mathbf{R}$.
- (c) $x^3 + 8x^2 + 8x + 1 = 0$, unde $x \in \mathbf{C}$.
- (d) $\bar{z} = z^2$, unde $z \in \mathbf{C}$.

(2) Fie mulțimea $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$. Să se arate că:

- (i) A este parte stabilă în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor reale.
- (ii) $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ.
- (iii) Elementul $7 + 4\sqrt{3}$ este inversabil în inelul A .

II. Analiză matematică 1. Fie funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$ și să se determine punctele de extrem ale funcției f .
- b) Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
- c) Să se arate că șirul

$$(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ cu } a_0 \in \mathbf{R} \text{ și } a_{n+1} = e^{-a_n} f(a_n), \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

este crescător și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

2. Fie $f : [1, e] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$.

a) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.

b) Să se determine primitivele funcției $g = f'f$ pe intervalul $(1, e)$.

III. Geometrie 1. Să se calculeze aria triunghiului echilateral ABC știind că $A(-1, 1)$ și $B(3, -2)$.

2. Să se calculeze $|\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$, știind că $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{u} - \vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

3. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC știind că $AB = 6$, $\widehat{B} = \frac{\pi}{4}$, $\widehat{C} = \frac{\pi}{6}$.

IV. Informatică Fie $n, m, p \leq 100$ numere naturale și fie \vec{x}_i , cu $i = 1, \dots, n$ și \vec{y}_j , cu $j = 1, \dots, m$ vectori p -dimensionali de numere reale.

a) Să se scrie un program care să calculeze elementele $d(i, j) = \|\vec{x}_i - \vec{y}_j\|^2$ (norma euclidiană la pătrat).

b) Dacă oricare 2 vectori $(\vec{x}_i, \vec{y}_j)_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, m}$ sunt ortogonali, să se scrie un program care să calculeze elementele $d(i, j)$, cu efectuarea unui număr cât mai mic de operații.

Notă. Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.

Timp de lucru - 3 ore.