

Concursul de admitere iulie 2010,
Domeniul de licență - Matematică

I. Algebră

1. Fie $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$ rădăcinile ecuației $x^2 + 2x + m = 0$, unde $m \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine valorile lui m pentru care $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.

b) Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2$ și $x_1^3 + x_2^3$ în funcție de m .

c) Dacă $m = -2^{2p}$ cu $p \in \mathbf{N}$, arătați că ecuația nu are rădăcini întregi.

2. Fie $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$. Să se arate că:

a) A este inel comutativ fără divizori ai lui zero în raport cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire a numerelor reale;

b) $2 + \sqrt{3}$ este un element inversabil al inelului A . Deduceți că A are o infinitate de elemente inversabile.

II. Analiză

1. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ cu $f(x) = \frac{x \ln x - 1}{x}$, $\forall x > 0$.

a) Studiați monotonia funcției f .

b) Determinați asimptotele la graficul funcției f .

c) Definim șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ cu $x_0 > e$ și $x_{n+1} = x_n f(x_n) + 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2. Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^n + 1} dx$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1 și I_2 .

b) Să se arate că $I_n < 1$ și $I_{n+1} < I_n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

III. Geometrie

1) Fie paralelogramul $ABCD$. Notăm cu $\vec{u} = \vec{AB}$ și $\vec{v} = \vec{AD}$. Fie E mijlocul lui AD și punctele R, S astfel încât $\vec{CS} = \frac{1}{3} \vec{CB}$ și $\vec{DR} = \frac{1}{3} \vec{DC}$. Să se exprime vectorii \vec{BE} și \vec{RS} în funcție de \vec{u} și \vec{v} și să se arate că $BE \parallel RS$.

2) Fie M un punct interior dreptunghiului $ABCD$. Să se arate că

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

3) În sistemul cartezian de coordonate xOy considerăm punctele $A(3, -2)$, $B(2, 0)$ și $C(4, 1)$. Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta AB .

4) Știind că $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$, să se calculeze $\sin 2x$.

IV. Informatică

Fie $S(m)$ un sistem de triaj cu o stivă de dimensiune m și două operații:

1. se introduce în stivă un număr citit de la tastatură

2. se afișează la consolă un număr extras din stiva nevidă,

oricare dintre cele două operații putând fi aplicată ori de câte ori este posibil.

Prin citirea de la tastatură a numerelor $1, \dots, n$, în această ordine, cu $n \leq m$ și aplicarea operațiilor descrise mai sus, $S(m)$ poate genera permutări cu n elemente, dar nu toate.

a) Dați exemplu de permutare cu 3 elemente care nu poate fi generată de $S(m)$, ($n = 3, m \geq 3$).

b) Fie p o permutare arbitrară cu $n \leq 100$ elemente, dată. Să se scrie un program într-unul dintre limbajele studiate în liceu (Pascal/C/C++) care să decidă dacă p poate fi generată de $S(m)$.

Notă: Se vor preciza detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucțiuni condiționale.

Timp de lucru 3 ore.