Universitatea din Bucureşti,
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2010,
Domeniul de licenţă - ***Informatică***

I. Algebră

1. a) Să se arate că $\sqrt{2}+i$ este rădăcină a ecuaţiei $x^4-2x^2+9=0$ şi să se determine şi celelalte rădăcini complexe ale ecuaţiei.

b) Să se arate că $S_n=(\sqrt{2}+i)^n+(\sqrt{2}-i)^n$ este număr real pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$ şi că S_n este număr întreg pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$ par.

2. Pentru fiecare număr întreg k considerăm mulţimea $\mathcal{A}_k=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ ky & x\end{pmatrix} \middle| x,y\in\mathbf{Z}\right\}$. Să se arate că:

a) $\mathcal{A}_k$ este inel comutativ cu adunarea şi înmulţirea matricelor pentru orice $k\in\mathbf{Z}$;

b) există $X,Y\in\mathcal{A}_1$ nenule cu $XY=0$ (unde 0 este matricea nulă din $M_2(\mathbf{Z})$);

c) dacă $X,Y\in\mathcal{A}_2$ şi $XY=0$, atunci $X=0$ sau $Y=0$.

II. Analiză

1. Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu $f(x)=x-1+e^{-x},\ \forall x\in\mathbf{R}$.

a) Calculaţi derivata funcţiei f şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

b) Studiaţi monotonia funcţiei f şi arătaţi că$f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

c) Definim şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $x_0>0$ şi $x_{n+1}=f(x_n),\ \forall n\in\mathbf{N}$. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent şi aflaţi limita sa.

2. Fie funcţiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)$ şi $g(x)=\sqrt{1+x^2},\ \forall x\in\mathbf{R}$.

a) Să se arate că funcţia f este o primitivă a funcţiei g.

b) Să se calculeze $I_1=\int\limits_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$ şi $I_2=\int\limits_0^{\pi}\cos x\sqrt{2-\cos^2 x}\,dx$.

III. Geometrie

1. Se dă patrulaterul convex ABCD şi M,N mijloacele diagonalelor AC şi respectiv BD. Să se arate că

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\,\overrightarrow{MN}\ .$$

2. Pe cercul $\mathcal{C}$ de centru O şi rază R se consideră două puncte diametral opuse A şi B şi un punct M diferit de A şi de B. Fie N punctul de intersecţie al dreptei AM cu tangenta în B la cercul $\mathcal{C}$. Să se exprime distanţele NA, NB şi MN în funcţie de R şi de măsura unghiului $\widehat{MAB}$.

3. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ pentru care punctele $A(2+m,m)$, $B(0,4)$ şi $C(5,3)$ sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza BC.

4. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuaţia $\cos 2x-\sqrt{3}\cos x+1=0$.

IV. Informatică

Fie multimea de numere $H=\{2^x\cdot 3^y\cdot 5^z\mid x,y,z\in\mathbf{N}\}$. Să se rezolve următoarele cerinţe într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal/C/C++):

a) Să se scrie o procedură care pentru un număr natural $a\leq 32000$ decide dacă a aparţine mulţimii H. Să se determine complexitatea timp a acestei proceduri în funcţie de a.

b) Dându-se un număr natural $n\leq 100$, să se afişeze primele n numere ale mulţimii H, în ordine crescătoare. De exemplu, pentru $n=8$ trebuie afişate numerele: $1,2,3,4,5,6,8,9$.

c) Daţi o soluţie în timp $O(n)$, liniar în funcţie de n, pentru cerinţa de la punctul b). Justificaţi.

Notă: Pentru fiecare soluţie se vor preciza detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucţiuni condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.