Universitatea din Bucureşti **18.07.2014**

Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2014
Domeniul de licenţă – *Informatică*

I. Algebră. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

(a) Să se determine matricele $X \in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $AX = XA$.

(b) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ există două numere întregi x_n şi y_n astfel încât $A^n = \begin{pmatrix} x_n & -2y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$.

(c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ numerele x_n şi y_n de la (b) sunt nenule.

II. Analiză. Fie $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

(a) Determinaţi ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f.

(b) Arătaţi că $f(x) \leq \frac{4}{e^2}$, $\forall x \in (-\infty, 0)$.

(c) Considerăm şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dat de $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ şi $x_{n+1} = f\left(\frac{1}{x_n}\right)$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent şi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(d) Calculaţi $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

III. Geometrie.

(a) Fie $A(1,1)$ şi $B(3,2)$ două puncte în plan. Să se determine punctul $M(x,0)$ astfel încât valoarea sumei $AM + MB$ să fie minimă. Să se găsească minimul acestei sume.

(b) Să se rezolve ecuaţia $\cos^4 x - \sin^4 x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) Fie ABC un triunghi cu laturile $AB = c$, $BC = a$ şi $AC = b$. Să se exprime suma de produse scalare $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ în funcţie de a, b şi c.

IV. Informatică. Se dă operaţia $\overline{} : \{1,2\} \to \{1,2\}$ astfel încât $\overline{1} = 2$ şi $\overline{2} = 1$. Operaţia se extinde asupra oricărei secvenţe formate cu cifre de 1 şi 2, de exemplu $\overline{1211212121} = 2122121212$. Se consideră şirul infinit s format cu cifre de 1 şi 2, generat incremental prin extindere după următoarea regulă de concatenare: $s_1 = 1221$, $s_2 = 1221211221121221$, …, $s_{k+1} = s_k\overline{s_k}\,\overline{s_k}s_k$, …, pentru orice număr natural nenul k.

Fie n un număr natural nenul, $n < 1000000$.

(a) Să se scrie un program care citeşte n şi afişează primele n cifre ale şirului s.
Exemplu: Pentru $n = 18$ programul va afişa 122121122112122121.

(b) Să se scrie un program care citeşte n şi afişează a n-a cifră a şirului s, astfel încât numărul de paşi ai programului să fie proporţional cu $\log_2 n$ (complexitate timp logaritmică în funcţie de n).
Exemplu: Pentru $n = 11$ programul va afişa 1, iar pentru $n = 20$ programul va afişa 2.

Notă: Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal,C,C++). Pentru fiecare soluţie se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: semnificaţia variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucţiunilor condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.