Universitatea din Bucureşti **19.07.2013**

Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2013

Domeniul de licenţă - *Informatică*

I. Algebră.

(a) Fie $n \geq 2$ un număr natural. Considerăm n numere reale cu proprietatea că oricum am alege unul dintre ele, suma celorlalte $n-1$ numere rămase este 0. Să se arate că toate cele n numere sunt egale cu 0.

(b) Câte elemente are mulţimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$?

(c) Să se arate că mulţimea $\mathcal{M}$ de la punctul precedent este parte stabilă în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor din $M_2(\mathbb{Z}_3)$ şi că $\mathcal{M}$ este corp comutativ împreună cu aceste operaţii.

II. Analiză. Fie funcţiile $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{\sin^2 x}$ şi $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = xf(x)$.

(a) Determinaţi limitele laterale ale funcţiei f în punctul 0.

(b) Arătaţi că ecuaţia $\sin x - x \cos x = 0$ are o singură soluţie în intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) Aflaţi mulţimea valorilor funcţiei g.

(d) Calculaţi $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x)dx$.

III. Geometrie.

(a) Fie $A(1,2)$ şi $B(3,-1)$ două puncte în plan. Determinaţi ecuaţiile dreptelor care trec prin punctul A şi sunt situate la distanţa 2 faţă de punctul B.

(b) Determinaţi numerele naturale a pentru care a, $a+1$ şi $a+2$ sunt lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic.

(c) Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de latură 2. Să se calculeze norma vectorului $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

IV. Informatică. Fie n un număr natural nenul şi $m = 2^n$. Se dă vectorul $0, 1, 2, 3, \ldots, m, m+1$ şi p, cu $1 \leq p \leq m$. În acest vector, marcăm numerele 0, p şi $m+1$ ca fiind şterse. *Exemplu*: Pentru $n = 3$ şi $p = 5$, avem vectorul $X, 1, 2, 3, 4, X, 6, 7, 8, X$ unde elementele 0, 5 şi 9 sunt marcate cu X ca fiind şterse.

(a) Scrieţi un program care să şteargă toate elementele vectorului, în n paşi, în aşa fel încât la pasul k să se şteargă 2^{k-1} elemente, dintre cele neşterse până la pasul respectiv. Programul va afişa $m-1$ perechi de forma (k, q) unde q este unul dintre elementele vectorului, diferit de p, iar k este pasul la care a fost şters q. Programul scris trebuie să aibă complexitatea timp liniară în funcţie de m, adică numărul de instrucţiuni ale programului să fie aproximativ egal cu dimensiunea vectorului.

(b) Scrieţi un program similar cu cel de la punctul (a), dar cu următoarea condiţie suplimentară: după pasul k, între oricare două elemente deja şterse consecutive să nu fie o distanţă mai mare de 2^{n-k}, unde prin distanţa dintre i şi j se înţelege $|j-i|$. Calculaţi complexitatea timp în funcţie de n a programului pe care l-aţi scris. *Exemplu*: Considerăm vectorul $X, 1, 2, 3, 4, X, 6, 7, 8, X$. Printr-o posibilă strategie de ştergere, conţinutul vectorului după fiecare pas k este: $X, 1, X, 3, 4, X, 6, 7, 8, X$ (după pasul 1), $X, 1, X, 3, X, X, 6, X, 8, X$ (după pasul 2), respectiv $X, X, X, X, X, X, X, X, X, X$ (după pasul 3). Rezultatul afişat de program în acest caz este secvenţa (1,2),(2,4),(2,7),(3,1),(3,3),(3,6),(3,8).

Notă: Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal,C,C++). Pentru fiecare soluţie se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: semnificaţia variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucţiunilor condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.