

Concursul de admitere iulie 2014
Domeniul de licență - *Matematică*

I. Algebră. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

(a) Să se arate că $A^3 = \mathbf{I}_2$ și să se calculeze A^{2014} .

(b) Să se determine matricele $X \in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Fie n un număr natural care nu este divizibil cu 3. Să se arate că există $X \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât $X^n = A$.

II. Analiză. Fie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$.

(a) Studiați monotonia funcției f .

(b) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f .

(c) Considerăm șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dat de $x_0 > 0$ și $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este convergent și că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(d) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.

III. Geometrie.

(a) În planul xOy fie punctele $A(-1, -2)$, $B(-4, 1)$ și $C(5, 4)$. Să se determine lungimea segmentului $[GO]$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC , iar O este centrul cercului circumscris acestui triunghi.

(b) Fie $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Să se calculeze $\operatorname{tg} \alpha$, știind că are loc egalitatea $\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(c) Fie $ABCD$ un paralelogram. Se consideră punctele M și N date de relațiile $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$, respectiv $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. Se notează cu P intersecția dintre dreapta AB și paralela dusă prin C la dreapta OM , unde O este punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului. Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $\overrightarrow{NP} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$.

IV. Informatică.

Se consideră ecuația de gradul al 2-lea cu coeficienți reali $ax^2 + bx + c = 0$ cu $a \neq 0$ și expresia: $S_n = x_1^n + x_2^n$, unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației. Să se scrie un program care primind coeficienții a, b, c ai ecuației și un număr natural n calculează și afișază valoarea expresiei S_n , știind că S_n este un număr real indiferent dacă rădăcinile ecuației sunt reale sau nu. De exemplu, dacă programul va primi la intrare numerele: 1 1 1 6 (ceea ce înseamnă că ecuația este $x^2 + x + 1 = 0$ și se cere S_6) va afișa 2.

Notă: Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.

Timp de lucru 3 ore.