

Concursul de admitere iulie 2015
Domeniul de licență – Informatică

I. Algebră. Fie numărul complex $z = 1 + 2i$.

- (a) Să se calculeze $|1 + z|$ și $|z^3|$.
- (b) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ numărul z^n este de forma $a_n + ib_n$ cu $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$.
- (c) Să se arate că $b_{n+2} - 2b_{n+1} + 5b_n = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- (d) Arătați că $z^n \notin \mathbb{R}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

II. Analiză. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - 2x^3}$ și $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- (a) Studiați derivabilitatea funcției f și determinați punctele sale de extrem local.
- (b) Fie $m \in (0, 1)$. Determinați numărul de soluții reale distincte ale ecuației $f(x) = m$.
- (c) Fie $x_0 \in (0, 1)$ și $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Arătați că $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- (d) Arătați că $I_1 - I_2 = \frac{1}{8}$.
- (e) Arătați că șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător și demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

III. Geometrie. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC cu $AB = 1$, $AC = 2$, $m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$, se construiesc, spre exterior, triunghiurile echilaterale ABM și ACN .

- (a) Calculați lungimile segmentelor BC și MN .
- (b) Fie D, E, F mijloacele segmentelor AM , AN și BC . Arătați că triunghiul DEF este echilateral.
- (c) Calculați $\vec{AB} \cdot \vec{AM}$ și $\vec{AB} \cdot \vec{AN}$, apoi determinați numerele x și y pentru care are loc relația:
$$\vec{MN} = x \vec{AB} + y \vec{AC}.$$

IV. Informatică. Se citesc numerele naturale nenule a, b, c, n , urmate de o secvență de n numere naturale distincte, notată cu s .

- (a) Să se scrie un program care afișează toate perechile (x, y) cu proprietatea că x și y sunt numere diferite din secvența s , care verifică ecuația $ax^2 + by^2 = c$.
Exemplu: Dacă programul citește la intrare 1 1 25 5 3 18 5 0 4, atunci afișează perechile (3,4) (4,3) (0,5) (5,0), nu neapărat în această ordine.
- (b) Dacă secvența s citită la intrare este formată din numere în ordine crescătoare, să se scrie un program cât mai eficient care afișează numărul de perechi (x, y) cu proprietatea de la punctul (a). Să se calculeze complexitatea timp a soluției prezentate.
Exemplu: Dacă programul citește la intrare 1 1 25 5 0 3 4 5 18, atunci afișează 4.

Notă: Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.

Timp de lucru 3 ore.