

Concursul de admitere iulie 2015  
Domeniul de licență - *Matematică*

**I. Algebră.** Fie ecuația  $(m + 1)x^2 - (2m + 1)x - 2m = 0$ , unde  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

- Determinați rădăcinile reale ale ecuației pentru  $m = 1$ .
- Determinați valorile parametrului  $m$  astfel încât ecuația să aibă toate rădăcinile reale.
- Determinați valorile parametrului  $m$  astfel încât  $x_1^2 + x_2^2 = -8$ , unde  $x_1, x_2$  sunt rădăcinile complexe ale ecuației.
- Să se determine toate valorile întregi ale lui  $m$  pentru care ambele rădăcini ale ecuației sunt întregi.

**II. Analiză.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-x}}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ a & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  și  $I_n = \int_1^2 \frac{f(x)}{x^n} dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

- Determinați  $a$  astfel încât funcția  $f$  să fie continuă.
- Arătați că dacă funcția  $f$  este continuă, atunci ea este și derivabilă.
- Demonstrați că  $f(x) \in (0, 1)$ ,  $\forall x > 0$ .
- Arătați că  $I_1 = \frac{3}{2} \ln \frac{4}{3}$ .
- Demonstrați că șirul  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este descrescător și că  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .

**III. Geometrie.** Considerăm paralelogramul  $ABCD$ .

- Fie  $E$  un punct cu proprietatea că  $\vec{CE} = 2 \vec{DE}$  și fie  $F$  un punct cu proprietatea că  $\vec{AF} = -2 \vec{BF}$ .  
Determinați  $x, y \in \mathbb{R}$  pentru care  $\vec{EF} = x \vec{AB} + y \vec{AC}$ .
- Demonstrați că  $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$ .
- Presupunem că există un punct  $M$  pentru care  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ . Demonstrați că, în acest caz,  $ABCD$  este dreptunghi.

**IV. Informatică.**

- Să se arate că orice număr natural nenul se poate scrie în mod unic ca o sumă de puteri ale lui 2 care nu se repetă (exemplu:  $77 = 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^6$ ).
- Numerele naturale de la 1 la 255 se codifică astfel:
  - puterile lui 2 se reprezintă prin literele:  $a = 1, b = 2, c = 4, d = 8, e = 16, f = 32, g = 64, h = 128$ ;
  - orice alt număr din intervalul menționat va fi reprezentat ca o combinație de aceste litere, aranjate în ordine alfabetică, în care orice literă apare cel mult o singură dată, astfel încât suma valorilor acestor litere să fie egală cu valoarea numărului (exemplu:  $acdg = 77$ ).

Să se scrie un program care, citind două șiruri de caractere ce reprezintă numere în convenția de mai sus, să scrie, la ieșire, șirul ce reprezintă suma numerelor astfel reprezentate (exemplu: dacă la intrare programul primește șirurile  $acdg$  și  $ac$  atunci, la ieșire, va scrie  $beg$ ). Șirurile de intrare sunt alese astfel încât suma numerelor pe care le reprezintă să fie mai mică sau egală cu 255.

Este posibil ca programul să calculeze șirul de ieșire fără a transforma șirurile în numere? Dacă da, dați o astfel de soluție.

**Notă:** Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.

**Timp de lucru 3 ore.**