

Concursul de admitere iulie 2017  
Domeniul de licență - *Matematică*

**I. Algebră.** Fie mulțimea  $A = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  și fie  $z = 1 + \sqrt[3]{2}$ . Să se arate că:

- (a)  $z^3 - 3z^2 + 3z = 3$ .
- (b) Toate rădăcinile reale ale ecuației  $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$  se găsesc în mulțimea  $A$ .
- (c) Mulțimea  $A$  este parte stabilă în raport cu adunarea numerelor reale și  $(A, +)$  este grup abelian.
- (d)  $z^2 \notin A$ .

**II. Analiză.** Fie funcțiile  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + (1-x)^n}$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

- (a) Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției  $f_2$ .
- (b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției  $f_3$ .
- (c) Să se studieze continuitatea funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

(d) Să se calculeze  $I = \int_0^1 \frac{1}{f_2(x)} dx$ .

**III. Geometrie.** În planul de coordonate  $xOy$  se consideră punctele  $A(a, 0)$ ,  $B(-a, 0)$ ,  $C(0, a)$  și  $D(0, b)$ , unde  $a, b > 0$  și pătratul  $ADEF$ , cu punctele  $E$  și  $F$  situate în cadranul I (ambele coordonate strict pozitive).

- (a) Exprimați vectorul  $\vec{OE}$  în funcție de vectorii  $\vec{OA}$  și  $\vec{OD}$ .
- (b) Arătați că punctele  $B, C, E$  sunt coliniare.
- (c) Arătați că ariile triunghiurilor  $FCO$  și  $EBO$  sunt egale.

**IV. Informatică.**

Considerăm triunghiul infinit de mai jos, format din numere naturale:

			1			
			2	3		
		4	5	6		
	7	8	9	10		
11	12	13	14	15		
16	17	18	19	20	21	
.....						

Spunem că perechea de numere  $(x, y)$  este adiacență dacă  $x$  și  $y$  sunt vecini pe aceeași linie sau pe diagonală, pe linii consecutive. Spre exemplu,  $(8,9)$ ,  $(12,8)$  și  $(8,13)$  sunt adiacențe, dar  $(8,14)$  sau  $(18,8)$  nu sunt adiacențe.

Numim drum de la  $x$  la  $y$  de lungime  $p - 1$ , cu  $p \geq 1$ , o secvență de numere  $x_1 x_2 x_3 \dots x_p$ , cu  $x = x_1$  și  $y = x_p$  și cu proprietatea că toate perechile  $(x_i, x_{i+1})$ , cu  $i$  de la 1 la  $p - 1$ , sunt adiacențe.

Scrieți un program, într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++), care primește ca date de intrare 2 numere naturale nenule  $x$  și  $y$  și afișează un drum de la  $x$  la  $y$  de lungime minimă. Spre exemplu, 1 2 5 8 13 este un drum de lungime minimă de la 1 la 13.

**Notă:** Se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.

**Timp de lucru 3 ore.**