

Concursul de admitere iulie 2016
Domeniul de licență – *Informatică*

I. Algebră. Fie mulțimea $A = \{a + ib\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

- (a) Să se arate că $(5 + 2i\sqrt{3})^2 = 13 + 20i\sqrt{3}$.
- (b) Să se calculeze $|5 + 2i\sqrt{3}|$.
- (c) Să se arate că A este parte stabilă în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor complexe și A este inel împreună cu aceste operații.
- (d) Dacă $u, v \in A$ și $uv = 5 + 2i\sqrt{3}$, atunci să se arate că unul dintre numerele u și v este 1 sau -1 .
- (e) Să se determine $u \in A$ pentru care $u^2 = 13 + 8i\sqrt{3}$.

II. Analiză. Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin(1 - 2x^2)$.

- (a) Să se determine punctele din domeniul de definiție al funcției f în care aceasta nu este derivabilă.
- (b) Studiați convexitatea funcției f .

(c) Calculați $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx$.

- (d) Demonstrați că funcția $g : \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, $g(x) = f(x)$ este bijectivă și determinați

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} g^{-1}(x) dx.$$

III. Geometrie. Pe laturile (AB) și (AC) ale triunghiului ABC se consideră punctele D respectiv E astfel încât $\frac{AD}{DB} = k$ și $\frac{AE}{EC} = p$.

- (a) Dacă $p = k$, să se găsească valoarea lui k pentru care $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$.
- (b) Dacă $p = k$ iar (CD) și (BE) sunt bisectoarele unghiurilor $\angle BCA$ și $\angle CBA$, să se arate că triunghiul ABC este isoscel.
- (c) Să se arate că mijloacele segmentelor (AB) , (AC) și (DE) sunt coliniare dacă și numai dacă $p = \frac{1}{k}$.

IV. Informatică.

Ionuț tocmai a terminat liceul și susține examenul de admitere la facultate. Știind că s-a pregătit foarte bine pentru examen, el dorește să își anunțe reușita după examen printr-o postare pe Facebook. Ionuț cunoaște n utilizatori reprezentați de numerele de la 1 la n , între care există m relații de prietenie de forma $i j$, unde i și j sunt utilizatori, iar n și m sunt numere naturale nenule. Un utilizator nu poate fi prieten cu el însuși, iar o relație de prietenie între doi utilizatori ne spune că fiecare dintre ei este prieten cu celălalt.

Întrucât dorește ca postarea lui să fie cât mai răspândită, Ionuț vrea să afle care sunt utilizatorii cei mai bine conectați din mulțimea sa de cunoscuți, pentru ca eventual să le ceară prietenia. Pentru aceasta, Ionuț trebuie să găsească cea mai mare submulțime de utilizatori cunoscuți, în care fiecare utilizator din această submulțime are cel puțin k prieteni aflați la rândul lor în submulțime, unde k este un număr natural nenul.

Fiind date la intrare numerele n , m și k , pe aceeași linie, separate prin spațiu, precum și $2m$ numere naturale cuprinse între 1 și n , pe o linie nouă, separate prin spațiu, reprezentând în ordine cele m relații de prietenie între cei n utilizatori, ajutați-l pe Ionuț să găsească o soluție la problema sa, rezolvând următoarele subpuncte:

- Să se determine și să se afișeze, în ordine de la 1 la n , numărul de prieteni al fiecăruia dintre cei n utilizatori, conform relațiilor de prietenie date.
- Să se determine și să se afișeze, printr-o soluție de complexitate timp cât mai bună, în funcție de datele de intrare, membrii celei mai mari submulțimi de utilizatori, cu proprietatea că fiecare utilizator din această submulțime are cel puțin k prieteni aflați la rândul lor în submulțime. În cazul în care nu există o astfel de submulțime pentru k dat, răspunsul va fi cuvântul NU.

Exemple:

Date de intrare	Date de ieșire
5 5 2 1 2 5 1 3 2 4 5 1 4	a) 3 2 1 2 2 b) 1 4 5
5 5 3 1 2 5 1 3 2 4 5 1 4	a) 3 2 1 2 2 b) NU
11 18 3 1 8 4 7 7 10 11 10 2 1 2 3 8 9 8 3 9 3 9 2 5 6 5 11 1 4 10 6 7 6 2 8 11 7 11 6	a) 3 4 3 2 2 4 4 4 3 3 4 b) 2 3 6 7 8 9 10 11

Note:

- Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.
- Programele vor folosi doar instrucțiunile de bază ale limbajului de programare ales, inclusiv cele de intrare/ieșire, dar nu și alte funcții din biblioteci specializate.
- Se va considera că datele de intrare ale programelor sunt oricât de mari, dar fără a pune probleme de reprezentare în memorie cu ajutorul tipurilor de date standard.