

Concursul de admitere iulie 2016
Domeniul de licență - *Matematică*

I. Algebră. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

- (a) Să se calculeze $2A^2 - 3A$.
- (b) Să se arate că $(2A^2 - 3A)A = A(2A^2 - 3A)$.
- (c) Să se determine toate matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $AX = XA$.
- (d) Să se arate că mulțimea $C = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$ este parte stabilă în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor și că C este inel împreună cu aceste operații.
- (e) Să se arate că $A^n \neq I_2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

II. Analiză. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$.

- (a) Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f și punctele de extrem local ale acestei funcții.
- (b) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ ecuația $f^{(n)}(x) = 0$ are două soluții reale, unde $f^{(n)}$ este derivata de ordinul n a funcției f .

(c) Calculați $I = \int_0^1 f(x) dx$.

(d) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{9^n} \int_1^2 (f(x))^n dx = 0$.

III. Geometrie. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de latură 2.

- (a) Calculați aria triunghiului ACE .
- (b) Calculați $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$.
- (c) Pe segmentele (AC) și (CE) se consideră punctele M respectiv N astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = k$.
Determinați numărul k astfel încât punctele B, N și M să fie coliniare.

IV. Informatică.

Se dă un șir de n numere întregi, cu n număr natural nenul, mai mic decât 32000. Se elimină primul element din șir și toate elementele șirului aflate pe poziții care reprezintă numere prime, în ordinea crescătoare a pozițiilor. Operația se repetă cu elementele rămase în șir, repositionate după eliminarea celorlalte, până când este eliminat și ultimul element rămas. Să se scrie un program care afișează elementele șirului inițial, în ordinea în care au fost eliminate conform algoritmului descris mai sus.

Exemplul 1. Pentru $n = 10$ și șirul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 programul va afișa 1 2 3 5 7 4 6 8 10 9.

Exemplul 2. Pentru $n = 20$ și șirul 4, 23, 16, -7, 89, 115, 23, 11, 15, 2, -8, -9, 21, 0, 75, 23, 32, -1, 4, 5 programul va afișa 4 23 16 89 23 -8 21 32 4 -7 115 11 2 0 5 15 -9 75 -1 23.

Notă: Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.

Timp de lucru 3 ore.