

Concursul de admitere septembrie 2010,
Domeniul de licență - Informatică

I. Algebră

(I) Fie m și n numere reale și fie polinomul $f = X^4 - 3X^3 + 3X^2 + mX + n$.

- (a) Să se determine valorile lui m și n pentru care f se divide cu polinomul $X^2 + 1$.
(b) Pentru valorile lui m și n determinate la punctul precedent, să se determine rădăcinile lui f .

(II) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

- (a) Să se arate că $\det(A) = 0$ și $A^2 = 3A$.
(b) Să se arate că matricea $I_3 - A$ este inversabilă și $(I_3 - A)^{-1} = I_3 - \frac{1}{2}A$, unde I_3 este matricea identitate de ordin 3.
(c) Să se calculeze A^n , unde $n \in \mathbf{N}^*$.

II. Analiză

1. Fie funcțiile $f : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathbf{R}$ și $g : \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathbf{R}$, date prin

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 5} + 1; \quad g(x) = -\sqrt{4x^2 - 5} + 1,$$

unde \mathcal{D}_1 și \mathcal{D}_2 sunt domeniile maxime de definiție ale celor două funcții.

- a) Să se determine \mathcal{D}_1 și \mathcal{D}_2 și să se studieze derivabilitatea funcțiilor.
b) Să se afle valorile lui x pentru care $f'(x) = g'(x)$ și cele pentru care $f'(x) + g'(x) = 0$.

2. Fie funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dată prin: $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

- a) Să se reprezinte grafic funcția.
b) Să se calculeze primitivele lui f .
c) Să se afle aria cuprinsă între graficul funcției, axa Ox și dreptele $x = 0$, $x = 1$.

III. Geometrie

1. Calculați aria și perimetrul trapezului dreptunghic $ABCD$ (în care $AB \parallel CD$, $AB \perp BC$) știind că $DC = BC = 3$, $AD = 5$.

2. Fie punctele $P = (1, 1)$, $Q = (-1, -1)$ și dreapta d de ecuație $(d) : x + y - 1 = 0$. Determinați un punct R pe dreapta d astfel încât triunghiul ΔPQR să fie dreptunghic. Câte astfel de puncte R există?

3. Rezolvați în \mathbf{R} ecuația

$$\sin(x) + \cos(2x) = 1.$$

IV. Informatică

Fie $n \leq 100$ un număr natural nenul și x_1, \dots, x_n un vector v de numere naturale cel mult egale cu 32000.

a) Să se scrie un program care să evalueze expresia

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i)^2$$

b) Există un algoritm care să evalueze expresia S în timp $O(n)$ în raport cu dimensiunea n a vectorului v ? Dacă da, să se implementeze acest algoritm sub formă de program.

Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluție se vor preciza detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucțiuni condiționale.

Timp de lucru 3 ore.